



TITLE:

10.一次元秩序形成の統計力学的理論(パターン形成,運動と統計,研究会報告)

AUTHOR(S):

長井, 達三; 川崎, 恭治

CITATION:

長井, 達三 ...[et al]. 10.一次元秩序形成の統計力学的理論(パターン形成,運動と統計,研究会報告). 物性研究 1985, 44(3): 448-453

ISSUE DATE:

1985-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/91606>

RIGHT:

逆に log-normal 分布であれば(5)式 (より一般的には $z = z_1^\delta z_2^{1-\delta}$) が成立することが示せる。

尚, $1/f$ ノイズではないがカスケードの繰り込みについては文献1を参照されたい。

文 献

- 1) H. Furukawa, Prog. Theor. Phys. 73 No.3 (to be published).

10. 一次元秩序形成の統計力学的理論

九州共立大 長 井 達 三
九大・理 川 崎 恭 治

§ 1. モデル

最近, 相転移を起こすいろいろな系での「ドメイン成長」が関心を集めている。そこでは, 系は高温の無秩序状態から, 転移点以下に急冷され非平衡状態におかれる。その後, 局所的秩序が徐々に形成され, 成長していく。“この様子を如何に記述するか, そして如何なる成長の法則があるか” — が問題である。

われわれは, この問題を界面集団の統計力学として捕える。ここでは, その第一歩として第1図に示すような直線状ドメイン系を考える。この系は次の機構によって発展するものとする。

- ① 界面は, 隣接界面から指数関

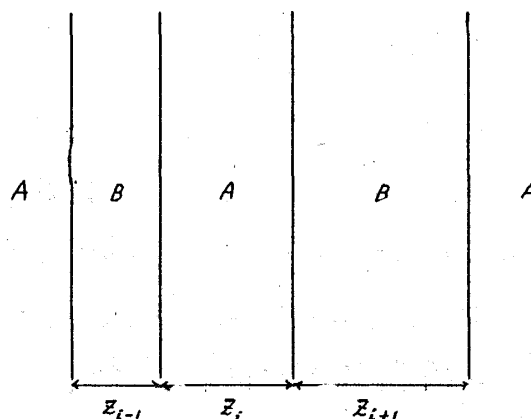
数型の引力を受けて運動する。

第 i 番目のドメインの大きさ z_i

は次の式に従って変化する。

$$\frac{dz_i}{dt} = v^*(z_{i-1}) - 2v^*(z_i) + v^*(z_{i+1}), \quad (1)$$

ここで, $i = 1, 2, \dots, N(t)$, $v^*(z)$
 $= (\alpha/2) e^{-z/\xi}$ で, α は正の



第1図 2種の直線状ドメイン系

定数, ξ は界面の厚さである。

- ② ドメイン・サイズが $\Delta \sim O(\xi)$ より小さくなると, そのドメインは消滅し, 両側のドメインが新たに相互作用する。

(1)式は, 二つの安定状態 (A, B) をもつ一次元 TDGL 方程式から導出された¹⁾。故に, 上の機構①と②で表現されるモデルは一次元 TDGL モデルを簡単にしたもので, 界面が形成された状態では両者は同等である。

われわれは, 界面を粒子に対応させて, 粒子系の統計力学の手法を使う。界面の数 $N(t)$ は時間と共に減少するのだが, それは未だ充分大きく, 熱力学的極限がとれるものとする。

§ 2. "BBGKY" 方程式系

ドメイン・サイズの分布関数の組 $g_1(z_1, t)$, $g_2(z_1, z_2; t)$, ... は, われわれの系の完全な情報を与える。これらの運動方程式は, 粒子系の BBGKY 方程式系と類似の方程式系をつくる²⁾。1 体分布の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} g_1(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} j(z, t) = \Gamma(z, t). \quad (2)$$

ここで, $j(z, t)$ は z 空間での位相点の流れを表わし次式で与えられる。

$$j(z, t) = -2v^*(z)g_1(z, t) + 2 \int_{\Delta}^{\infty} dz' v^*(z') g_2(z', z; t). \quad (3)$$

(2)式の右辺の $\Gamma(z, t)$ は消滅機構②からくるもので, ドメインの衝突・消滅を表わす。

$$\begin{aligned} \Gamma(z, t) = & 4v^*(\Delta)g(\Delta, t)g(z, t) - 4 \int_{\Delta}^{\infty} dz' v^*(\Delta)g_3(z', \Delta, z; t) \\ & + 2 \iint_{\Delta}^{\infty} dz' dz'' v^*(\Delta)g_3(z', \Delta, z''; t) \delta(z' + \Delta + z'' - z). \end{aligned} \quad (4)$$

(3), (4)式からわかるように, g_1 を求めるには, g_2 と g_3 が必要である。更に, g_2 を求めるには, g_3 と g_4 が必要である。以下, 同様に無限の連鎖がつづく。

この方程式系を解くために「クラスター展開」を行なう：

$$g_2(z_1, z_2; t) = g_1(z_1, t)g_2(z_2, t) + H_2(z_1, z_2; t). \quad (5)$$

第一項は, 隣接する二つのドメイン分布の独立性を表わし, 第二項は相関を表わす。 g_3 も同様に, g_1 , H_2 , H_3 を使って表現される。 g_4 以下も同様である。

§ 3. スケーリング解

第一近似として, H_2 まで考慮し, $H_3 \equiv H_4 \equiv \dots \equiv 0$ とおく。そうすると, "BBGKY" 方程式系は, g_1 と H_2 に関する二つの閉じた方程式になる。これを解くに当って, われわれは「スケーリング性」を仮定する。すなわち, この系は, ある複雑な前駆状態の後に ($t > t_0$), 一つの時間に依存する特徴的な長さ (平均ドメイン・サイズ $\bar{z}(t)$) で表わされるような "ふるまい" をする—と考える。この特徴的な長さとして, $\bar{z}(t)$ の代わりに, われわれは次式で定義される $z_c(t)$ を採用する:

$$j(z_c(t), t) = 0, \quad z_c(t) = \frac{1}{\nu} \bar{z}(t), \quad (6)$$

ここで, ν は正の定数で, 後で決められる。充分長い時間が経過した後では, 次の式が満たされる。

$$z_c(t) \gg z_c(t_0) \gg \xi, \quad t \gg t_0. \quad (7)$$

このようなスケーリング性を仮定すると, われわれは, (2)式から直ちにドメインの成長法則を得ることができる:

$$z_c(t) = \frac{1}{\nu} \bar{z}(t) = \xi \ln\left(\frac{\alpha}{\xi} t\right). \quad (8)$$

この対数則は, 界面間の相互作用が指数関数であることに起因している。

分布関数のスケール解は次の形になる:

$$g_1(z_1, t) = \frac{1}{z_c(t)} g_1^*(x_1), \quad (9)$$

$$g_2(z_1, z_2; t) = \frac{1}{2z_c(t)^2} e^{(z_2 - z_c(t))/\xi} \chi_2^*(x_1, x_2), \quad x_2 < 1, \quad (10)$$

$$= \frac{1}{z_c(t)^2} g_2^*(x_1, x_2), \quad x_2 > 1, \quad (11)$$

ただし, $x_i \equiv z_i/z_c(t)$, $z_1 > z_2$ 。スケーリング関数 g_1^* , χ_2^* , g_2^* は高々 $O(1)$ である。(2)式から生じる g_1^* の式には χ_2^* が表われる。 χ_2^* は近似的に g_1^* のみで表わされるので, 結局 g_1^* の従う方程式は次のように求まる。

$$\frac{d}{dx} [x g_1^*(x)] = -\frac{1}{2} \int_1^{x-2} dx' g_1^*(x') g_1^*(x-x'-1), \quad x > 1, \quad (12)$$

ただし,

$$g_1^*(x) = 0, \quad x < 1. \quad (13)$$

(13)式からわかるように、 $z_c(t)$ は存在する最小ドメインのサイズである。1体分布には、鋭いカットが存在する。(12)

式の解を第2図に示す。

実線がそれで、 $x = 1$

にカットがあり、 $x > 1$

では単調に減少する。

点線は、相関を無視し

た解である²⁾。相関の効

果は、分布の巾を広げ

ている。ヒストグラム

は、同じモデルの計算

機シミュレーション

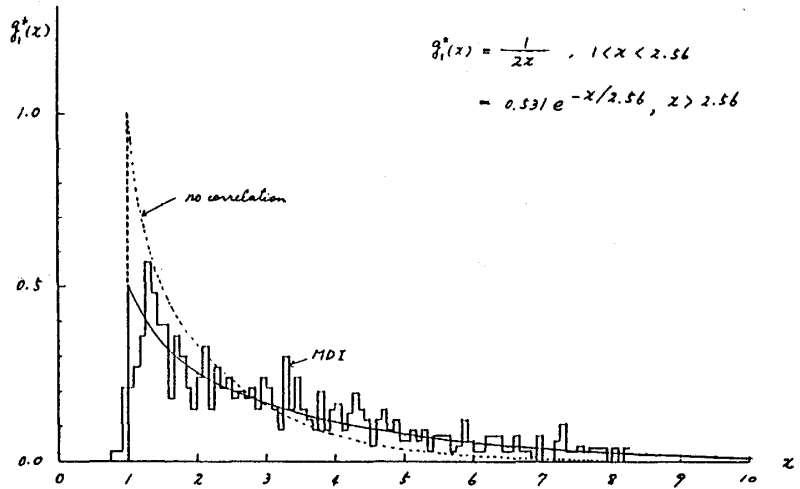
(MDI)の結果である³⁾。これは相関を考慮した解とよく一致している。更に、(8)式の ν は次のように求まる： $\nu = 3.56$ （相関を含む）， 2.28 （相関を含まない）， 3.5 ± 0.2 （MDI）。このように、 ν についても、相関効果は重要である。

一方、 $\chi_2^*(x_1, x_2)$ は次式のようになる：

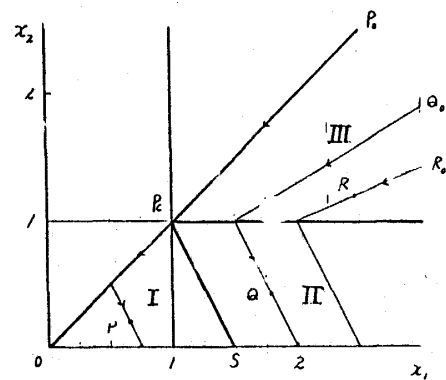
$$\chi_2^*(x_1, x_2) = \chi_2^*(y), \quad y \equiv x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2} > 1, \quad (14)$$

$$= 0, \quad y < 1. \quad (15)$$

ここで、 $\chi_2^*(y)$ は $g_1^*(x)$ によって表わされる y だけの関数で、 $y = 1$ に鋭いカットがある。この事情を見るために、2ドメインの位相空間（第3図）を考える。第3図の直線 $P_c S$ が $y = 1$ である。領域Ⅰで $\chi_2^*(x_1, x_2)$ は0、領域Ⅱで $\chi_2^*(y)$ 、そして領域Ⅲでは、スケーリングの性質が変わって(11)式で与えられる。この図には、更に、平均場の中で運動する二つの隣接するドメインの



第2図 1体分布のスケーリング関数



第3図 2ドメインの位相空間

軌跡が描いてある。これは、各時刻でのドメイン・サイズ $z_i(t')$ をその時刻での $z_c(t')$ でスケールしたものの軌跡 ($x_1(t')$, $x_2(t')$) である。 P_0 , Q_0 , R_0 は初期時刻 $t'=t_0$ での位置で無限遠にある。 P , Q , R が現在 $t'=t$ での位置で、領域 I に到達する軌跡はすべて P_0 の方向から出発し、 P_c を通る。この時、二つのドメインは、一旦カット・サイズより小さくなる。このことが、領域 I で 2 体分布 $g_2(z_1, z_2; t)$ が最も小さくなる原因である。図からわかるように、 $y(t') = x_1(t') + \frac{1}{2}x_2(t') - \frac{1}{2} = y$ は、領域 I, II で運動の定数になる。2 体相関関数 $H_2(z_1, z_2; t)$ を求めるとき、われわれは、これらの軌跡に沿って、時間積分を行なった。上で述べたように、二つのドメインの成長の歴史が、現在の $H_2(z_1, z_2; t)$ を決定し、更に、 $g_1(z, t)$ を決定している。(12)式は、その結果得られたものである。

§ 4. ま と め

i) 展開パラメタがない

上で見たように、相関効果は大きい。実際、(5)式の第一項と第二項は同じオーダーである。従って、高次の相関関数の連鎖を断ち切るための展開パラメタが存在しないように見える。しかしながら、物理的に考えて、相関効果は次数が上がる程小さくなるはずである。注目するドメインの成長に対して、その第 2 隣接ドメインの相関効果は、第 1 隣接ドメインのものより小さいにちがいない。上で見たように、第 1 隣接ドメインの相関効果は、この系の最も定性的な特徴（対数成長則、1 体分布のカットの存在、スケーリングのふるまい）は変えなかった。それは、半定量的特徴（1 体分布の巾、 ν の値）を変えた。このことは、上の物理的予想を支持している。

ii) ドメイン分布の時間発展は、非マルコフ的である。

上で見たように、2 体相関関数は、過去のドメイン分布の歴史に依存する。これは、特徴的な長さ $z_c(t)$ が時間と共に変わるためである。

iii) ドメイン成長の問題で、スケーリングの概念が有効である。

複雑な "BBGKY" 方程式(2)は、スケーリングによって、単純・明快な式(12)に変わった。スケーリング性、すなわち自己相似性の概念は、一見複雑そうに見えるドメイン成長の問題の普遍的性格を見い出すのに、一つの有力な手段であろう。

IV) 一般の系へ拡張できる。

上の理論の骨組みは、ドメイン・サイズの運動方程式(1)が一般の場合にも、そのまま応用できる。

文 献

- 1) K. Kawasaki and T. Ohta, Physica **116A** (1982) 573.
- 2) K. Kawasaki and T. Nagai, ibid. **121A** (1983) 175.
- 3) T. Nagai and K. Kawasaki, ibid. **120A** (1983) 587.

11. 核生成－成長型 1 次相転移過程の 2 相パターン

京大・基研 関 本 謙

秩序変数非保存の系の，核生成－成長型 1 次相転移ダイナミクスに就いて，準安定相と安定相のつくる 2 相パターン，特にそれを記述する相関函数の理論を報告した。講演の内容はより詳しい形で物性研究 **43**－3 (1984) p. 107 に発表されているのでそちらを御参照下さい。

(又，短い解説が学会誌「最近の研究から」に掲載される予定。)

12. ϕ^4 - kink の粘性係数

東大・理 小 形 正 男

1. はじめに

1 次元系の kink (又は domain wall) というパターンが，熱平衡系において，どのような運動をしているかという問題については，未だわかっていない面が多い¹⁾。低温での動的な振舞いに対しては，kink を自由粒子として扱う free kink gas model が提唱されている^{1, 2)}。しかし温度が高くなるにつれて，他の励起との相互作用によって引き起こされる種々の現象が重要になってくる。特に熱励起された phonon (ポテンシャルの極小付近の振動) との衝突の高次の効果を考慮すると，kink の粘性係数や Brown 運動が生ずることがわかった。